06/04/17: Έστω $(G,\cdot)$ ομάδα και $\alpha \in G$.
Η τάξη του α ορίζεται να είναι
$o(\alpha) := |\langle \alpha \rangle|$

- $o(\alpha) < \infty \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : \alpha^k = e$. Αν $o(\alpha) < \infty \Rightarrow o(\alpha) = \min\{m \in \mathbb{N} \mid \alpha^m = e\}$
- Αν $o(\alpha) < \infty$, τότε $\alpha^k = e \Leftrightarrow o(\alpha) \mid k$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: $\forall \alpha \in G : o(\alpha) = o(\alpha^{-1})$

Αποδ.: Αν $o(\alpha) < \infty \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : \alpha^k = e \Leftrightarrow (\alpha^k)^{-1} = e^{-1} = e \Leftrightarrow (\alpha^{-1})^k = e \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow o(\alpha^{-1}) < \infty$

Άρα $o(\alpha) < \infty \Leftrightarrow o(\alpha^{-1}) < \infty$, και τότε $o(\alpha) = \min\{m \in \mathbb{N} \mid \alpha^m = e\} =$
$= \min\{m \in \mathbb{N} \mid (\alpha^m)^{-1} = e^{-1} = e\} = \min\{m \in \mathbb{N} \mid (\alpha^{-1})^m = e\} = o(\alpha^{-1})$

Αν $(G_1,\cdot)$, $(G_2,\cdot)$ ομάδες, θεωρούμε την ομάδα ευθύ γινόμενο:
$(G_1 \times G_2, \cdot)$ όπου: $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 \cdot x_2, y_1 \cdot y_2)$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω $(\alpha, b) \in G_1 \times G_2$. Τότε: $o((\alpha,b)) < \infty \Leftrightarrow \begin{cases} o(\alpha) < \infty \\ o(b) < \infty \end{cases}$
Αν $o((\alpha,b)) < \infty$, τότε $o((\alpha,b)) = [o(\alpha), o(b)]$.

Αποδ: Αν $o((\alpha,b)) < \infty \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : (\alpha,b)^k = e_{G_1 \times G_2} = (e_1, e_2) \Rightarrow$
$\Rightarrow (\alpha^k, b^k) = (e_1, e_2) \Rightarrow \begin{cases} \alpha^k = e_{G_1} \\ b^k = e_{G_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} o(\alpha) < \infty \\ o(b) < \infty \end{cases}$

Αντίστροφα: Έστω $\begin{cases} o(\alpha) < \infty \\ o(b) < \infty \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \exists k \in \mathbb{N} : \alpha^k = e_1 \Rightarrow (\alpha^k)^\lambda = e^\lambda = e \\ \exists \lambda \in \mathbb{N} : b^\lambda = e_2 \Rightarrow (b^\lambda)^k = e^k = e \end{matrix} \Rightarrow$
$\begin{cases} \alpha^{k\lambda} = e_1 \\ b^{k\lambda} = e_2 \end{cases}$ Τότε $(\alpha,b)^{k\lambda} = (\alpha^{k\lambda}, b^{k\lambda}) = (e_1, e_2) = e_{G_1 \times G_2} \Rightarrow$
$\Rightarrow o((\alpha,b)) < \infty$

Έστω $o(\alpha) = n < \infty$ και $o(b) = m < \infty$. Αρκεί νδο $o((\alpha,b)) = [n,m]$
Θέτω $k = [n,m]$. Τότε $\exists x,y \in \mathbb{N} : k = n \cdot x \wedge k = m \cdot y$
Τότε $(\alpha,b)^k = (\alpha^k, b^k) = (\alpha^{n \cdot x}, b^{m \cdot y}) = ((\alpha^n)^x, (b^m)^y) =$
$= (e_1^x, e_2^y) = (e_1, e_2) = e_{G_1 \times G_2}$

Άρα $\boxed{o((\alpha,b)) \mid \kappa}$ ①

Είναι ~~...~~ $(\alpha,b)^{o((\alpha,b))} = (e_1,e_2) = e_{G_1\times G_2} \Rightarrow$

$\Rightarrow (\alpha^{o((\alpha,b))}, b^{o((\alpha,b))}) = (e_1,e_2) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\alpha^{o(\alpha,b)} = e_1 \Rightarrow n \mid o((\alpha,b)) \\ b^{o((\alpha,b))} = e_2 \Rightarrow m \mid o((\alpha,b))\end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\overbrace{[n,m]}^{\kappa} \mid o((\alpha,b))}$ ②

Από τις ①, ② $\Rightarrow \boxed{\kappa = [n,m] = o((\alpha,b)) = [o(\alpha), o(b)]}$

Π.χ: $G_1 = S_3$, $G_2 = \mathbb{C}^*$. Στην ομάδα $(S_3 \times \mathbb{C}^*)$ Θεωρούμε το στοιχείο $(\rho_1, i) \in S_3 \times \mathbb{C}^*$ όπου $\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$

Είναι: $\rho_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$

$\rho_1^3 = \rho_1^2 \cdot \rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix} = i \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{o(\rho_1) = 3}$

Ακόμη $i^4 = 1 \in \mathbb{C}^* \Rightarrow \boxed{o(i) = 4}$

Άρα $o((\rho_1, i)) = [3,4] = 12$.

Πόρισμα: Αν $(G_i, \cdot)$, $i = 1,2,\ldots,n$ ομάδες και $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \times_{i=1}^{n} G_i$

Τότε $o((\alpha_1,\ldots,\alpha_n)) < \infty$ στην $G_1 \times \ldots \times G_n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow o(\alpha_i) < \infty$ στην G_i, $\forall i = 1,\ldots,n$

και τότε $o((\alpha_1,\ldots,\alpha_n)) = [o(\alpha_1),\ldots,o(\alpha_n)]$.

Έστω $(G,\cdot)$ ομάδα και $x \in G$, $\alpha \in G$. Τότε

$o(\alpha) = o(x \cdot \alpha \cdot x^{-1}) = o(x^{-1} \cdot \alpha \cdot x)$

Είναι $\forall \kappa \in \mathbb{N}$ $(x \cdot \alpha \cdot x^{-1})^{\kappa} = \underbrace{(x \cdot \alpha \cdot x^{-1})(x \cdot \alpha \cdot x^{-1}) \cdots (x \cdot \alpha \cdot x^{-1})}_{\kappa\text{-φορές}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{x \alpha^{\kappa} x^{-1} = (x \alpha x^{-1})^{\kappa}}$ ★

$(x\cdot\alpha\cdot x^{-1})^k = e \overset{(*)}{\Leftrightarrow} x\alpha^k x^{-1} = e \Leftrightarrow x^{-1}\cdot x\cdot\alpha^k\cdot x^{-1}\cdot x =$
$= x^{-1}\cdot e\cdot x \Leftrightarrow e\alpha^k\cdot e = e \Leftrightarrow \alpha^k = e$
Άρα $o(x\cdot\alpha\cdot x^{-1})<\infty \Leftrightarrow o(\alpha)<\infty$.

Αν $o(\alpha)<\infty$, τότε $o(\alpha)=\min\{m\in\mathbb{N} \mid \alpha^m = e\} =$
$=\min\{m\in\mathbb{N} \mid (x\cdot\alpha\cdot x^{-1})^m = e\} = o(x\cdot\alpha\cdot x^{-1})$
Παρόμοια $o(\alpha)=o(x^{-1}\cdot\alpha\cdot x)$.
$o(x^{-1}\cdot\alpha\cdot x) = o(x^{-1}\cdot\alpha\cdot(x^{-1})^{-1}) = o(\alpha)$

Έστω $\alpha, b\in G$. ~~...~~ Τότε ποια η $o(\alpha\cdot b)$ =;
(Γενικά δεν υπάρχει κάποια σχέση)

Π.χ.: $G=GL_2(\mathbb{R})$, $A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$A^2=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2 \Rightarrow \boxed{o(A)=2}$

$B^2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2 \Rightarrow \boxed{o(B)=2}$

$AB=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \forall n\geq 1: (AB)^n=\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow$
$\Rightarrow (\forall n\geq 1): (A\cdot B)^n \neq I_2 \Rightarrow \boxed{o(A\cdot B)=\infty}$.

Αυτό που ισχύει είναι ότι $o(\alpha\cdot b)=o(b\cdot\alpha)$

ΚΥΚΛΙΚΕΣ ΟΜΑΔΕΣ

Έστω $G=\langle\alpha\rangle=\{\alpha^n\in G \mid n\in\mathbb{Z}\}$
Θεώρημα: Αν $H\leq G$, τότε H: κυκλική.

Απόδειξη: Αν $H=\{e\}$ τότε προφανώς $H=\langle e\rangle$ δηλαδή H: κυκλική. Άρα έστω $H\neq\{e\} \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists x\in H: x\neq e$. Τότε $x\in G \Rightarrow x=\alpha^k, k\in\mathbb{Z}, k\neq 0$
(διότι $x^0=e$ άτοπο)

Ισχυρισμός: Η H περιέχει θετικές ακέραιες δυνάμεις του α.
Διότι:

- αν $k \geq 1 \Rightarrow x = \alpha^k \in H$ και $k \geq 1$
- αν $k < 0 \Rightarrow x = \alpha^k \in H \leq G \Rightarrow x^{-1} = (\alpha^k)^{-1} \in H \Rightarrow \alpha^{-k} \in H$

και αφού $k < 0 \Rightarrow -k > 0$.

Από τον ισχυρισμό $\Rightarrow$ το σύνολο $\{m \in \mathbb{N} / \alpha^m \in H\} \neq \emptyset$
Από Αρχή Καλής Διάταξης $\Rightarrow$ το σύνολο $\{m \in \mathbb{N} / \alpha^m \in H\}$ έχει ελάχιστο στοιχείο, έστω $k = \min\{m \in \mathbb{N} / \alpha^m \in H\}$.
Θ.δ.ο. $H = \langle \alpha^k \rangle$
Είναι $\alpha^k \in H$ εξ' ορισμού. Επειδή $H \leq G$ και $\alpha^k \in H \Rightarrow$
$\Rightarrow (\alpha^k)^n \in H, \forall n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \langle \alpha^k \rangle = \{(\alpha^k)^n \in G / n \in \mathbb{Z}\} \subseteq H$. (1)
Έστω $x \in H \Rightarrow x \in G \Rightarrow x = \alpha^n, n \in \mathbb{Z}$
Από την ευκλ. διαίρεση του n με το k θα έχουμε:
$n = k \cdot m + r$, όπου $0 \leq r < k$
Τότε $x = \alpha^n = \alpha^{k \cdot m + r} = \alpha^{k \cdot m} \cdot \alpha^r = (\alpha^k)^m \cdot \alpha^r \Rightarrow$
$\Rightarrow \underbrace{((\alpha^k)^m)^{-1}}_{\in H} \cdot \underbrace{\alpha^n}_{\in H (\text{υπόθ})} = \alpha^r \overset{H \leq G}{\Rightarrow} \alpha^r \in H$. Αν $r \neq 0 \Rightarrow r \in \mathbb{N}$ και $\alpha^r \in H$, όμως $0 < r < k = \min\{m \in \mathbb{N} / \alpha^m \in H\}$ ΑΤΟΠΟ
διότι $\alpha^k \in H \Rightarrow (\alpha^k)^{-m} \in H$

Άρα $r = 0$

Τότε $n = k \cdot m$ και άρα $x = \alpha^n = \alpha^{k \cdot m} = (\alpha^k)^m \in \langle \alpha^k \rangle$
Άρα $H \subseteq \langle \alpha^k \rangle$ (2)
Από τις (1) κ' (2) $\Rightarrow$ $\boxed{H = \langle \alpha^k \rangle}$: κυκλική.

Ποιες είναι οι υποομάδες μιας άπειρης κυκλικής ομάδας;
— Έστω $G = \langle \alpha \rangle$: άπειρη κυκλική $\Rightarrow o(\alpha) = \infty$
Ισχυρισμός: Οι υποομάδες της G είναι οι εξής:
$\underset{\langle e \rangle}{\{e\}}$, $G = \langle \alpha \rangle$, $\langle \alpha^2 \rangle$, ..., $\langle \alpha^n \rangle$, ...

Κάθε άλλη υποομάδα της G είναι μία από τις παραπάνω λόγω της $H = \langle \alpha^k \rangle$ με $k = \min\{m \in \mathbb{N} / \alpha^m \in e\}$ (*).
Αν $\langle \alpha^k \rangle = \langle \alpha^\lambda \rangle$, $k, \lambda \in \mathbb{N}$ Θδο $k = \lambda$.