

06/04/17. : Έστω  $(G, \cdot)$  ομάδα και  $\alpha \in G$ .

Η τάξη του  $\alpha$  ορίζεται να είναι  $o(\alpha)$

$$o(\alpha) := |\langle \alpha \rangle|$$

•  $o(\alpha) < \infty \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : \alpha^k = e$ . Αν  $o(\alpha) < \infty \Rightarrow o(\alpha) = \min \{ m \in \mathbb{N} \mid \alpha^m = e \}$

• Αν  $o(\alpha) < \infty$ , τότε  $\alpha^k = e \Leftrightarrow o(\alpha) \mid k$ .

Παρατήρηση :  $\forall \alpha \in G : o(\alpha) = o(\alpha^{-1})$

Απόδ. : Αν  $o(\alpha) < \infty \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : \alpha^k = e \Leftrightarrow (\alpha^k)^{-1} = e^{-1} = e \Leftrightarrow (\alpha^{-1})^k = e \Leftrightarrow o(\alpha^{-1}) < \infty$

Αρα  $o(\alpha) < \infty \Leftrightarrow o(\alpha^{-1}) < \infty$ , και τότε  $o(\alpha) = \min \{ m \in \mathbb{N} \mid \alpha^m = e \} = \min \{ m \in \mathbb{N} \mid (\alpha^{-1})^m = e \} = o(\alpha^{-1})$

Αν  $(G_1, \cdot), (G_2, \cdot)$  ομάδες, θεωρούμε την ομάδα ενδο γινόμενο  $(G_1 \times G_2, \cdot)$  όπου  $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 \cdot x_2, y_1 \cdot y_2)$

Προτάση : Έστω  $(\alpha, b) \in G_1 \times G_2$ , τότε  $o((\alpha, b)) < \infty \Leftrightarrow \begin{cases} o(\alpha) < \infty \\ o(b) < \infty \end{cases}$   
Αν  $o((\alpha, b)) < \infty$ , τότε  $o((\alpha, b)) = [o(\alpha), o(b)]$ .

Απόδ. : Αν  $o((\alpha, b)) < \infty \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : (\alpha, b)^k = e_{G_1 \times G_2} = (e_1, e_2) \Rightarrow (\alpha^k, b^k) = (e_1, e_2) \Rightarrow \begin{cases} \alpha^k = e_{G_1} \\ b^k = e_{G_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} o(\alpha) < \infty \\ o(b) < \infty \end{cases}$

Αντίστροφα : Έστω  $\begin{cases} o(\alpha) < \infty \\ o(b) < \infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{N} : \alpha^k = e_1 \Rightarrow (\alpha^k)^{\lambda} = e_1^{\lambda} = e \\ \exists \lambda \in \mathbb{N} : b^{\lambda} = e_2 \Rightarrow (b^{\lambda})^k = e_2^k = e \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} \alpha^{k\lambda} = e_1 \\ b^{k\lambda} = e_2 \end{cases} \parallel$  τότε  $(\alpha, b)^{k\lambda} = (\alpha^{k\lambda}, b^{k\lambda}) = (e_1, e_2) = e_{G_1 \times G_2} \Rightarrow o((\alpha, b)) < \infty$

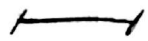
Έστω  $o(\alpha) = n < \infty$  και  $o(b) = m < \infty$ . Αρα  $\forall d \in \mathbb{N} : o((\alpha, b)) = [n, m]$   
Θέσω  $k = [n, m]$ . Τότε  $\exists x, y \in \mathbb{N} : k = n \cdot x \wedge k = m \cdot y$   
Τότε  $(\alpha, b)^k = (\alpha^k, b^k) = (\alpha^{n \cdot x}, b^{m \cdot y}) = ((\alpha^n)^x, (b^m)^y) = (e_1^x, e_2^y) = (e_1, e_2) = e_{G_1 \times G_2}$

Αρα  $[o((\alpha, b)) | k] \textcircled{1}$

Είναι  $(\alpha, b)^{o((\alpha, b))} = (e_1, e_2) = e_{\alpha, \beta} \Rightarrow$   
 $\rightarrow (\alpha^{o((\alpha, b))}, \beta^{o((\alpha, b))}) = (e_1, e_2) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha^{o((\alpha, b))} = e_1 \Rightarrow n | o((\alpha, b)) \\ \beta^{o((\alpha, b))} = e_2 \Rightarrow m | o((\alpha, b)) \end{array} \right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow [n, m] | o((\alpha, b)) \textcircled{2}$

Αν'αυ  $\textcircled{1}, \textcircled{2} \Rightarrow k = [n, m] = o((\alpha, b)) = [o(\alpha), o(\beta)]$



Π.χ :  $G_1 = S_3, G_2 = \mathbb{C}^*$ . Σημ  $\alpha/\beta \alpha$  ( $S_3 \times \mathbb{C}^*$ )  $\alpha \omega$ -  
 ποίη να βρούμε  $(P_1, i) \in S_3 \times \mathbb{C}^*$  όπου

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

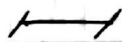
$$\text{Είναι: } P_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_1^3 = P_1^2 \cdot P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [o(P_1) = 3]$$

$$\text{Ακόμη } i^4 = 1 \in \mathbb{C}^* \Rightarrow [o(i) = 4]$$

$$\text{Αρα } o((P_1, i)) = [3, 4] = 12.$$

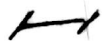


Πρόταση : Αν  $(G_i, \cdot), i=1, 2, \dots, n$  ο/αίς και  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \prod_{i=1}^n G_i$

Τότε  $o((\alpha_1, \dots, \alpha_n)) < \infty$  αν  $G_1 \times \dots \times G_n \Rightarrow$

$(\Rightarrow) o(\alpha_i) < \infty$  αν  $G_i, \forall i=1, \dots, n$

$$\text{και τότε } o((\alpha_1, \dots, \alpha_n)) = [o(\alpha_1), \dots, o(\alpha_n)].$$



Εάν  $(G, \cdot)$  ο/αίς και  $x \in G, \alpha \in G$ . Τότε  
 $o(\alpha) = o(x \cdot \alpha \cdot x^{-1}) = o(x^{-1} \cdot \alpha \cdot x)$

Είναι  $\forall k \in \mathbb{N} (x \cdot \alpha \cdot x^{-1})^k = \underbrace{(x \cdot \alpha \cdot x^{-1}) (x \cdot \alpha \cdot x^{-1}) \dots (x \cdot \alpha \cdot x^{-1})}_k \Rightarrow$

$$\Rightarrow x \alpha^k x^{-1} = (x \alpha x^{-1})^k *$$

$$(x \cdot \alpha \cdot x^{-1})^k = e \stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} x \alpha^k x^{-1} = e \Leftrightarrow x^{-1} \cdot x \cdot \alpha^k \cdot x^{-1} \cdot x = e \\ = x^{-1} \cdot e \cdot x \Leftrightarrow e \alpha^k \cdot e = e \Leftrightarrow \alpha^k = e$$

Αρα  $o(x \cdot \alpha \cdot x^{-1}) < \infty \Leftrightarrow o(\alpha) < \infty$ .

$$\text{Αν } o(\alpha) < \infty, \text{ τότε } o(\alpha) = \min\{m \in \mathbb{N} \mid \alpha^m = e\} = \\ = \min\{m \in \mathbb{N} \mid (x \cdot \alpha \cdot x^{-1})^m = e\} = o(x \cdot \alpha \cdot x^{-1})$$

Παρόμοια  $o(\alpha) = o(x^{-1} \cdot \alpha \cdot x)$ .

$$\alpha(x^{-1} \cdot \alpha \cdot x) = o(x^{-1} \cdot \alpha \cdot (x^{-1})^{-1}) = o(\alpha)$$

↔

Έστω  $a, b \in G$ . ~~Πότε~~ τότε ποια η  $o(ab)$ ;   
 (Γενικά δεν υπάρχει κάποια σχέση)

Π.χ.:  $G = GL_2(\mathbb{R})$ ,  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \Rightarrow \boxed{o(A) = 2}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \Rightarrow \boxed{o(B) = 2}$$

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \forall n \geq 1: (AB)^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\forall n \geq 1): (AB)^n \neq I_2 \Rightarrow \boxed{o(AB) = \infty}$$

↔

Αρα δεν ισχύει πάντα ότι  $o(ab) = o(ba)$

↔

## ΚΥΚΛΙΚΕΣ ΟΜΑΔΕΣ

Έστω  $G = \langle \alpha \rangle = \{\alpha^n \in G \mid n \in \mathbb{Z}\}$

Θεώρημα: Αν  $H \leq G$ , τότε  $H$ : κυκλική.

Απόδειξη: Αν  $H = \{e\}$  τότε προφανώς  $H = \langle e \rangle$  δηλαδή  $H$ : κυκλική. Αρα έστω  $H \neq \{e\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists x \in H: x \neq e$ . Τότε  $x \in G \Rightarrow x = \alpha^k, k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$    
 (Σίγουρα  $x^0 = e$  άρα όχι)

Πομπή: Η Η περιέχει θετικές ακέραιες δυνάμεις του α.  
 Διότι:

- αν  $k \geq 1 \Rightarrow x = \alpha^k \in H$  και  $k \geq 1$
- αν  $k < 0 \Rightarrow x = \alpha^k \in H \leq G \Rightarrow x^{-1} = (\alpha^k)^{-1} \in H \Rightarrow \alpha^{-k} \in H$   
 και αφού  $k < 0 \Rightarrow -k > 0$

Από τον πομπή  $\Rightarrow$  το σύνολο  $\{m \in \mathbb{N} \mid \alpha^m \in H\} \neq \emptyset$

Από Αρχή Καλής Διατάξης  $\Rightarrow$  το σύνολο  $\{m \in \mathbb{N} \mid \alpha^m \in H\}$   
 έχει ελάχιστο στοιχείο, έστω  $k = \min\{m \in \mathbb{N} \mid \alpha^m \in H\}$   
 Ο.δ.ο.  $\langle \alpha^k \rangle$

Είναι  $\alpha^k \in H \subseteq \langle \alpha^k \rangle$  ορισμός. Επειδή  $H \leq G$  και  $\alpha^k \in H \Rightarrow$   
 $\Rightarrow (\alpha^k)^n \in H, \forall n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \langle \alpha^k \rangle = \{(\alpha^k)^n \in G \mid n \in \mathbb{Z}\} \subseteq H$ . ①

Έστω  $x \in H \Rightarrow x \in G \Rightarrow x = \alpha^n, n \in \mathbb{Z}$

Από την ευκλ. διαίρεση του  $n$  με το  $k$  θα έχουμε:

$$n = k \cdot m + r, \text{ όπου } 0 \leq r < k$$

$$\text{Τότε } x = \alpha^n = \alpha^{k \cdot m + r} = \alpha^{k \cdot m} \cdot \alpha^r = (\alpha^k)^m \cdot \alpha^r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{((\alpha^k)^m)^{-1}}_{\in H} \cdot \underbrace{\alpha^n}_{\in H} = \alpha^r \stackrel{H \leq G}{\Rightarrow} \alpha^r \in H. \text{ Αν } r \neq 0 \Rightarrow r \in \mathbb{N} \text{ και } \alpha^r \in H, \text{ όπου } 0 < r < k = \min\{m \in \mathbb{N} \mid \alpha^m \in H\} \text{ ΑΤΟΠΟ}$$

Άρα  $r=0$

$$\text{Τότε } n = k \cdot m \text{ και άρα } x = \alpha^n = \alpha^{k \cdot m} = (\alpha^k)^m \in \langle \alpha^k \rangle$$

Άρα  $H \subseteq \langle \alpha^k \rangle$  ②

Από ① & ②  $\Rightarrow H = \langle \alpha^k \rangle$  : κυκλική.

Ποιες είναι οι υποομάδες μιας άπειρης κυκλικής ομάδας:

- Έστω  $G = \langle \alpha \rangle$  : άπειρη κυκλική.  $\Rightarrow o(\alpha) = \infty$

Πομπή: Οι υποομάδες της  $G$  είναι οι εξής:

$$\{e\}, G = \langle \alpha \rangle, \langle \alpha^2 \rangle, \dots, \langle \alpha^n \rangle, \dots$$

«

Κάθε άλλη υποομάδα της  $G$  είναι μια από τις παραπάνω λόγω της  $H = \langle \alpha^k \rangle$  με  $k = \min\{m \in \mathbb{N} \mid \alpha^m = e\} (*)$ .

Αν  $\langle \alpha^k \rangle = \langle \alpha^n \rangle$ , κλειν. οδο  $k=n$ .